$C.N \Rightarrow C.U \Rightarrow C.S$

$\searrow C.A \nearrow$

Université Abdelmalek Assaâdi
FST Tanger/ Année 08-09
M121/Groupes 1 et 2

Série de TD n°4

Exercice1

On définit les deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n};\ n \geq 1 \text{ et } g_n(x) = \frac{nx}{nx+1};\ n \geq 1.$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) et (g_n).
2. Etudier leur convergence uniforme sur $[0,1]$.
3. Etudier la convergence simple puis uniforme de (f_n) et (g_n) sur $[1,+\infty[$.

Exercice2

On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$; $\forall a \in]0,+\infty[$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice3

Soit $\alpha > 0$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}.$$

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a,+\infty[$; $\forall a > 0$.
3. Etudier, suivant les valeurs de α, la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice4

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right).$$

1. Montrer que la série converge uniformément sur $[0,1]$. Soit $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$.

Amal
Laattar

Exercice5

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

1. Montrer que cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer la somme de la série et montrer qu'elle ne converge pas unifomément sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$; $a > 0$.

Exercice 6

1. Montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ sont unifomément convergentes sur $[\delta + 2k\pi, (2k+2)\pi - \delta]$ avec $0 < \delta < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.
2. Etudier les séries de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{\cos nx}{\ln n};\ n \geq 2,$$
$$v_n(x) = \frac{\cos 2nx}{\ln n};\ n \geq 2.$$

Exercice 7

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Etudier la convergence simple, absolue et uniforme de cette série. Soit $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8

1. Soit $u_n(x) = \sqrt{n}xe^{-n^2x}$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit α un réel donné. Trouver l'ensemble des réels x pour lequels la série de terme général

$$v_n(x) = n^x e^{-\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}};\ n \geq 1,$$

est convergente. En déduire que $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge normalement sur $]-\infty, a]$; $a < \alpha - 1$.

Exercice 1 $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$; $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$, $x \in [0,1]$

1/ Convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$

- Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$
- Si $x \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ donc (f_n) c.s vers $f = 0$

Convergence simple de (g_n) sur $[0,1]$

Si $x = 0$ alors $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = 0$

Si $x \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{nx} = 1$

donc (g_n) c.s vers g ~~telle~~ que : $g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in]0,1] \end{cases}$

/ Convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$

On a : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x}{x+n} = h(x)$, $h'(x) = \dfrac{n}{(x+n)^2} > 0$

h est croissante sur $[0,1]$ donc $\delta_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} h(x) = h(1) = \dfrac{1}{1+n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ donc (f_n) c.u vers f sur $[0,1]$

Convergence uniforme de (g_n) sur $[0,1]$

Si $x = 0$ alors $|g_n(0) - g(0)| = 0$

Si $x \neq 0$ alors $|g_n(x) - g(x)| = \left|\dfrac{nx}{nx+1} - 1\right| = \dfrac{1}{nx+1} = k(x)$

et $\forall x \in [0,1]$: $k'(x) = \dfrac{-n}{(nx+1)^2} \leq 0$

k est decroissante sur $[0,1]$ donc $\delta_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} k(x) = k(0) = 1$

(δ_n) ne tend pas vers 0 donc la convergence de (g_n) n'est pas uniforme vers g sur $[0,1]$

/ • (f_n) c.s vers f sur $[a,+\infty[$ et (g_n) c.s vers g sur $[a,+\infty[$

et $\forall x \in [a,+\infty[$ $(a>0)$: $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$

• On a $\delta_n = \sup\limits_{[a,+\infty[} |g_n(x) - g(x)| = \sup\limits_{[a,+\infty[} k(x) = k(a) = \dfrac{1}{na+1}$

et $\lim_{+\infty} \delta_n = 0$ donc (g_n) c.u vers g sur $[1,+\infty[$

- On a $\delta_n = \sup_{[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[1,+\infty[} h(x)$

Par absurde, supposons que (f_n) c.u vers f sur $[1,+\infty[$ alors

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ ; \forall n > N \ ; \forall x \in [1,+\infty[\ : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall n > N \ : \forall x \in [1,+\infty[\ : \dfrac{x}{x+n} < \varepsilon$

En particulier pour $x = n$: $\forall n > N : \dfrac{n}{n+n} < \varepsilon$ càd $\dfrac{1}{2} < \varepsilon$

?

Absurde, donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[1,+\infty[$

Exercice 2

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1/ Convergence simple de (f_n) sur $[-a,a]$ avec $a > 0$

- Si $x = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$

Si $x \neq 0$ fixé alors $|f_n(x) - 1| = |x^2 \sin \frac{1}{nx}| = x^2 \left|\sin \frac{1}{nx}\right| \underbrace{\leq}_{?} x^2 \cdot \frac{1}{|nx|} = \frac{|x|}{n}$

- On $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

d'où (f_n) c.s vers f où $f(x) = 1 \ \forall x \in [-a,a]$

Convergence uniforme de (f_n) sur $[-a,a]$ vers f

On a $|f_n(0) - f(0)| = 0$

Si $x \neq 0$ alors $|f_n(x) - f(x)| = |x^2 \sin \frac{1}{nx}| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n}$

d'où $0 \leq \delta_n = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{a}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0 \Rightarrow (f_n)$ c.u vers f sur $[-a,a]$

2/ Si (f_n) c.u vers f sur $\mathbb{R}$ alors

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ ; \ \forall n > N \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall n > N \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ |x^2 \sin \frac{1}{nx}| < \varepsilon$

En particulier (pour $x = n$) : $\forall n > N : n^2 \sin \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

càd $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 0$. Absurde avec le fait que $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 1$

donc (f_n) ne converge pas unift vers f sur $\mathbb{R}$

Exercice3 $\alpha>0$ $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $x\in\mathbb{R}^+$

Rappel : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta e^{-x} = 0$

1/ Convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$

• Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)=0} \Rightarrow$?

• Si $x>0$ fixé ; $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \underset{N=nx}{=} \lim \left(\frac{N}{x}\right)^\alpha x\, e^{-N} = \lim\limits_{N\to+\infty} x^{1-\alpha}(N^\alpha e^{-N}) = 0$

donc (f_n) c.s vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}^+$

/ Convergence uniforme de (f_n) sur $[a,+\infty[$; $a>0$

$\forall x\geq a$: $|f_n(x)-f(x)| = n^\alpha x e^{-nx} \leq n^\alpha x e^{-na}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(n^\alpha x e^{-na}) = 0$ d'où pour $\varepsilon=1$; $\exists N\in\mathbb{N}$

telque $\forall n>N$: $n^2(n^\alpha x e^{-na}) < 1$

c-à-d $\forall n>N$: $n^\alpha x e^{-na} < \frac{1}{n^2}$

d'où $0\leq \delta_n = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ et (f_n) c.u vers f sur $[a,+\infty[$

Convergence uniforme de (f_n) sur $[0,+\infty[$

On pose $g(x) = |f_n(x)-f(x)| = n^\alpha x e^{-nx}$ définie sur $[0,+\infty[$

$g'(x) = \boxed{n^\alpha(e^{-nx} - nx\,e^{-nx})} \overset{?}{=} n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$

x	0		$1/n$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On a $\delta_n = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} g(x) = g\left(\frac{1}{n}\right)$

$\delta_n = n^\alpha \cdot \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$

Si $0<\alpha<1$ alors $\alpha-1<0$ et $\lim\limits_{+\infty} \delta_n = 0$ donc (f_n) c.u vers f sur $[0,+\infty[$

Si $\alpha>1$ alors $\lim\limits_{+\infty} \delta_n = +\infty$ et si $\alpha=1$ alors $\lim\limits_{+\infty} \delta_n = \frac{1}{e}$

dans ces 2 cas (δ_n) ne tend pas vers 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$

<u>Exercice 4</u> $\quad U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$

$$U_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(2n x^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}\right) = \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}}\left(2n - (2n+1)x\right)$$

$$U_n'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \boxed{x = \frac{2n}{2n+1}}$$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$U_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$U_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\forall x \in [0,1] : \quad U_n(x) \leq U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$

et $U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$

De plus $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = e^{2n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)} = e^{-2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \simeq e^{-2n\left(\frac{1}{2n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

d'où $U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim \frac{1}{e(2n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2e\, n^{3/2}}$

On a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.v (série de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$)

donc $\sum U_n(x)$ est normalement convergente sur $[0,1]$ donc $\sum U_n(x)$ est uniformément convergente

2/. On a : (U_n) continues sur $[0,1]$ et $\sum U_n(x)$ c.u vers f sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$

• ~~On peut écrire~~ $\cancel{U_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{n}}}$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1}} - \frac{x^3}{\sqrt{1}} + \frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{x^5}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{n}} \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

où $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n}} = -a_{2n}$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence

• $R = 1$; car $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = 1$

; la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable

sur $]-1,1[$ donc f dérivable sur $[0,1[$ en ...

Exercice 5 $U_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$; $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x)$

1/ Pour $x = 0$; $U_n(0) = 0$; $S_n(0) = 0$; $\sum S_n(0)$ c.v vers 0

Pour $x \neq 0$; $x^2+1 > 1$; $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$; la serie $\sum U_n(x)$ est une serie geometrique de raison q ; $0<q<1$ donc elle est c.v.

Ainsi $\sum U_n(x)$ est c.v sur $\mathbb{R}$.

Rappel : $\sum_{n\geq 1} q^n = \frac{q}{1-q}$

2/. Pour $x = 0$; $S(0) = \lim_{n\to 0} S_n(0) = 0$

Pour $x \neq 0$; $S(x) = \sum_{n\geq 1} x^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x^2 \cdot \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$

d'où $S(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

- $\forall n \geq 1$: $U_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $S_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme S n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (S n'est pas continue en 0) donc la convergence de $S_n(x)$ vers $S(x)$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$; c.à.d que $\sum U_n(x)$ ne converge pas uniformement vers $S(x)$ sur $\mathbb{R}$
- soit $x \geq a > 0$; Alors $\sum U_n(x)$ c.v vers $S(x) = 1$ et

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

On a $x \geq a \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a^2)^n} = 0$ car $0 < \frac{1}{1+a^2} < 1$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,+\infty[} |S_n(x) - S(x)| = 0$

donc $S_n(x)$ c.v uniformement vers $S(x)=1$ sur $[a, +\infty[$, $a>0$

- De même sur $]-\infty, -a]$; $x \leq -a \Rightarrow x^2 > a^2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{]-\infty,-a]} |S_n(x) - S(x)| = 0$

donc $S_n(x)$ c.v uniformement vers $S(x)=1$ sur $]-\infty, -a]$; $a>0$

Exercice 6 1/ $U_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n} = a_n(x) \cdot b_n(x)$ où $a_n(x) = \frac{1}{n}$; $b_n(x) = \sin nx$

- On a : $a_n > 0$; (a_n) decroissante ; $\lim_{+\infty} a_n = 0$ $\quad 2\pi - \frac{\delta}{2} = \frac{-\delta}{2}$
- $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$

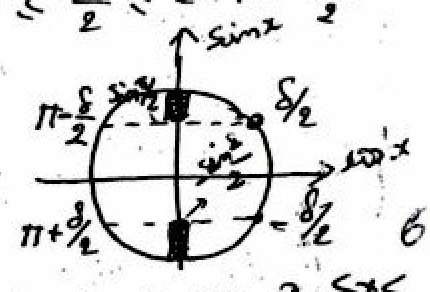
en effet : On a $\delta + 2k\pi \leq x \leq (2k+2)\pi - \delta \Rightarrow \frac{\delta}{2} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq k\pi + \pi - \frac{\delta}{2}$

$0 < \delta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$

Si k pair alors $\boxed{\sin \frac{x}{2} > \sin \frac{\delta}{2}}$

Si k impair alors $\boxed{\sin \frac{x}{2} < -\sin \frac{\delta}{2}}$

d'où $\left|\sin \frac{x}{2}\right| > \sin \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} < \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$



6

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq$

D'après le theoreme d'Abel pour les series de fonctions, la serie converge uniformement sur $D = [\delta + 2k\pi, (2k+2)\pi - \delta]$

- $U_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$. Même methode en prenant $b_n(x) = \cos nx$

2/. $U_n(x) = \frac{\cos nx}{\ln n}$; $a_n = \frac{1}{\ln n}$; $a_n > 0$, $(a_n) \downarrow$, $\lim_{\infty} a_n = 0$

. $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$ $\forall x \in D$: domaine de la question 1

donc $\sum U_n(x)$ c.v uniformement sur D

. $U_n(x) = \frac{\cos 2nx}{\ln n}$ $n \geq 2$; $a_n = \frac{1}{\ln n}$ $a_n > 0$, $(a_n) \downarrow$, $\lim_{\infty} a_n = 0$

$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\sum \cos 2kx\right| \leq \frac{1}{|\sin x|} \leq \frac{1}{\sin \delta} = M$ $\forall x \in D'$ où

$D' = [\frac{\delta}{2} + k\pi, (k+1)\pi - \delta/2]$ et $0 < \delta < \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Th. d'Abel : $\sum U_n(x)$ c.v uniforment sur D'

EXERCICE 7 1/. Pour $x < 0$; $\lim_{+\infty} U_n(x) = +\infty$ donc $\sum U_n(x)$ diverge

. Pour $x \geq 0$; $-nx \leq 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ c.v (Serie de Riemann) donc $\sum U_n(x)$ est normalement c.v sur $[0, +\infty[$ donc la serie est simplement, absolument, uniformement c.v sur $[0, +\infty[$

2/. $\forall n \geq 1$: $U_n(x)$ continue sur $[0, +\infty[$ et $\sum U_n(x)$ c.v uniforment vers f sur $[0, +\infty[$ donc f est continue sur $[0, +\infty[$

- U_n est derivable sur $[0, +\infty[$ et $U_n'(x) = \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2}$
  - Pour $x = 0$: $U_n'(0) = \frac{-n}{1+n^2} \sim -\frac{1}{n}$? et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum U_n'(0)$ div
  - Pour $x > 0$; $\lim_{n \to +\infty} n^2 U_n'(x) = \lim_{+\infty} \frac{-n^3}{1+n^2} e^{-nx} = 0$ donc pour $\varepsilon = 1$

$\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n > N$: $|n^2 U_n'(x)| < 1 \Rightarrow |U_n'(x)| < \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ c.v $\Rightarrow \sum U_n'(x)$ est uniformemet c.v sur $]0, +\infty[$ donc f est derivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \left(\sum_{n \geq 1} U_n(x)\right)' = \sum_{n \geq 1} U_n'(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$

EXERCICE 8 1/ $U_n'(x) = \sqrt{n}\, e^{-n^2 x}(1 - n^2 x)$

x	0		$1/n^2$		$+\infty$
$U_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$U_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\forall x \in \mathbb{R}^+$: $U_n(x) \leq U_n(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{e \cdot n^{3/2}}$

On a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.v (Serie de Riemann) $\Rightarrow \sum U_n(x)$ c.v normalement donc unif^t sur $\mathbb{R}$

2/. On considere la suite $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ qui converge vers $\beta \geq 0$ d'où $\exists\, \varepsilon_n \to 0$ telle que $U_n = \beta + \varepsilon_n$ et ainsi $v_n(x) = e^{x \ln n - \alpha(\ln n + \beta + \varepsilon_n)} = e^{(x-\alpha)\ln n - \alpha\beta - \alpha\varepsilon_n} \approx \frac{e^{-\alpha\beta}}{n^{\alpha - x}}$

$\sum \frac{1}{n^{\alpha-x}}$ c.v si et ssi $\alpha - x > 1$ càd $x < \alpha - 1$ donc $\sum v_n(x)$ c.v si $x < \alpha - 1$.

- Considerons $1 < b < \alpha - a$: Alors $\frac{1}{n^{\alpha-x}} \leq \frac{1}{n^b}$ et $\sum \frac{1}{n^b}$ c.v $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha-x}}$ c.v $\Rightarrow \sum v_n$ est normaleme